

**Ecuaciones Diferenciales - 1er cuatrimestre 2010**

PRÁCTICA 6 – ESPACIOS DE SOBOLEV

- Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y sean  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $|\alpha| \leq k$ . Entonces
  - $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$  y  $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$  para todo par de multiíndices  $\alpha, \beta$  tales que  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .
  - Para cada  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$  y  $D^\alpha (\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ .
  - Si  $V \subset \Omega$ , entonces  $u \in W^{k,p}(V)$ .
  - Si  $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ , entonces  $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$  y

$$D^\alpha (\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u,$$

donde  $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ , y  $\beta \leq \alpha$  ssi  $\beta_i \leq \alpha_i$  para todo  $i$ .

- $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach.
- Probar que si  $u \in W^{1,p}((a,b))$ ,  $1 \leq p < \infty$  entonces  $u$  es absolutamente continua en  $(a,b)$ .
    - Probar que si  $u \in W^{1,p}((a,b))$ ,  $p > 1$ , entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq \left( \int_a^b |u'|^p dt \right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

- Probar que existe una constante  $C$  tal que para toda  $f \in H^1((a,b))$ ,

$$|f(x)| \leq C \|f\|_{H^1((a,b))}$$

para todo  $x \in [a,b]$ .

- Mostrar que (a) es falso en  $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^2$ .
  - Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de  $H^1((a,b))$  es precompacto en  $C([a,b])$ , y por lo tanto en  $L^2((a,b))$ .
- Sea  $f \in H^1(\mathbb{R})$ , probar que  $h^{-1}(\tau_h f - f)$  converge a  $f'$  en  $L^2(\mathbb{R})$  cuando  $h \rightarrow 0$ , donde  $\tau_h f(x) = f(x+h)$ .  
Hint: escribir  $h^{-1}(\tau_h f - f)$  como  $f' * \varphi_h$ .
  - Sea  $f \in L^2((a,b))$  tal que  $f(a) = f(b)$ . Probar que  $f \in H^1((a,b))$  si y sólo si  $\sum_k k^2 |\hat{f}(k)|^2 < \infty$ , donde  $\hat{f}(k)$  son los coeficientes del desarrollo de  $f$  en series de Fourier.
  - Probar que si  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  entonces

$$\int_\Omega |Du|^2 dx \leq C \left( \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_\Omega |\Delta u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

(Hint: hacer una integración por partes) Concluir que en  $H_0^2(\Omega)$ ,  $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$  es una norma equivalente a la usual.

- Supongamos que  $\Omega$  es conexo y que  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  satisface  $\nabla u = 0$  a.e. en  $\Omega$ . Probar que  $u$  es constante en  $\Omega$ .
- Sea  $\Omega$  un abierto conexo y acotado de  $\mathbb{R}^n$  con borde  $C^1$ . Probar que existe una constante  $C > 0$  que depende sólo de  $n$  y  $\Omega$  tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada  $u \in H^1(\Omega)$ , donde

$$(u)_\Omega = \int_\Omega u dx.$$

- Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  con  $F'$  acotada. Supongamos que  $\Omega$  es acotado y  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  para  $1 < p < \infty$ . Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

10. Sea  $1 < p < \infty$  y  $\Omega$  acotado.

(a) Probar que si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$  y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

(Sugerencia:  $u^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u)$  para

$$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

(b) Probar que si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$ .

(c) Probar que si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces

$$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } \{u = 0\}.$$

11. Usar la transformada de Fourier para probar que si  $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$  con  $k > n/2$ , entonces  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$  y

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)},$$

donde la constante  $C$  depende sólo de  $k$  y  $n$ .

12. Una función  $u \in H_0^2(\Omega)$  se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador bilaplaciano

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

si verifica

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

para toda  $v \in H_0^2(\Omega)$ . ( $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ ).

(a) Probar que  $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  es solución clásica de (1) si y sólo si es solución débil de (1).

(b) Probar que dada  $f \in L^2(\Omega)$  existe una única solución débil de (1). (Sugerencia: Ejercicio 6).

13. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $\partial\Omega \in C^1$  y  $f \in L^2(\Omega)$ .

(a) Mostrar que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente formulación débil:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

para toda  $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

(b) Mostrar que para toda  $f \in L^2(\Omega)$  existe una única  $u \in H^1(\Omega)$  solución débil de este problema.

14. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j}) + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde

(a)  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  con  $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega$ .

(b)  $c \in L^\infty(\Omega), c \geq 0$ .

(c)  $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  con  $\operatorname{div} b = 0$  en  $\Omega$ .

Probar que para toda  $f \in L^2(\Omega)$ , existe una única  $u \in H_0^1(\Omega)$  solución débil del problema.

15. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $\partial\Omega \in C^1$  y  $f \in L^2(\Omega)$ .

- (a) Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces  $\int_\Omega f \, dx = 0$ .  
 (b) Mostrar que si  $f \in L^2(\Omega)$  verifica que  $\int_\Omega f \, dx = 0$ , entonces existe una única  $u \in H^1(\Omega)$  con  $\int_\Omega u \, dx = 0$  solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en  $H^1(\Omega)$  salvo constante. (Sugerencia: Ejercicio 8).

16. *Principio débil del máximo*

Sea  $Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i}$  un operador uniformemente elíptico con  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ . Decimos que  $u \in H^1(\Omega)$  verifica  $Lu \geq 0$  en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de  $Lu = 0$  si

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i} \, dx \leq 0, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0.$$

- (a) Verificar que  $u \in C^2(\Omega)$  es subsolución débil de  $Lu = 0$  si y sólo si  $Lu \geq 0$ .  
 (b) Probar que si  $u$  es subsolución débil de  $Lu = 0$  y  $u^+ \in H_0^1(\Omega)$  (es decir  $u \leq 0$  en  $\partial\Omega$ ), se tiene que  $u \leq 0$  en  $\Omega$ .

17. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $\partial\Omega \in C^1$ . Probar que existe una sucesión  $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \nearrow \infty$  de autovalores del problema con autofunciones  $u_k \in H^1(\Omega)$  donde  $u_1 = cte$  y  $\{u_k\}_{k=1}^\infty$  forman una base ortonormal de  $L^2(\Omega)$  y una base ortogonal de  $H^1(\Omega)$ .

18. *Lema de Cea*

Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita  $V \subset H_0^1(\Omega)$ ,  $V = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$  y se define la *solución aproximada*  $\tilde{u} \in V$  como la solución del problema

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u} \nabla \phi_i \, dx = \int_\Omega f \phi_i \, dx \quad i = 1, \dots, n.$$

- (a) Probar que  $\tilde{u}$  está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).  
 (b) Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, el método da la “mejor aproximación” que permite el subespacio  $V$ .

19. Se define el *p-Laplaciano* como  $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  con  $p > 1$  (cuando  $p = 2$ ,  $\Delta_p = \Delta$ ). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in L^{p'}(\Omega)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ).

(a) Probar que  $u \in C_0^2(\Omega)$  es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

(b) Probar que si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  minimiza el siguiente funcional

$$\begin{aligned} \Psi : W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Psi(u) &= \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \int_{\Omega} f u dx \end{aligned}$$

entonces es una solución débil del problema del  $p$ -Laplaciano.